



# ETUSUP.com

Titre

[C1][ch1] Generalités

Type

Cours

Ecole

FST Tanger

Classe

S1-S2

Matière

Mécanique du point

Professeur

Ali DAANOUN

Année univ

2010/2011

# GENERALITES

## Métrologie

La métrologie est la partie de la physique qui concerne la mesure des grandeurs.

### 1. Systèmes d'unités

Soit  $G$  une grandeur physique, elle s'exprimera par sa mesure dans une unité :

$$\text{Grandeur} = \text{mesure} \times \text{unité}$$

Un système d'unités comprend des unités fondamentales choisies arbitrairement et des unités dérivées déduites des précédentes à partir des relations de définition.

Les grandeurs fondamentales que nous allons considérer ici sont celles du système international d'unités : la longueur  $L$ , la masse  $M$ , le temps  $T$ , etc....

Dans le système de grandeurs fondamentales  $L, M, T, \dots$  les relations de la physique peuvent s'écrire sous la forme d'une équation aux dimensions :

$$G = L^\alpha \cdot M^\beta \cdot T^\gamma \dots$$

Exemple de quelques grandeurs physiques dans le système international  $S.I$  :

Grandeurs fondamentales :

Grandeurs physiques		Unités		équations aux dimensions
nom	symbole	nom	symbole	
longueur	$l$	mètre	$m$	$L$
masse	$m$	kilogramme	$kg$	$M$
temps	$t$	seconde	$s$	$T$

Grandeurs dérivées :

Grandeurs physiques		Unités		équations aux dimensions
nom	symbole	nom	symbole	
vitesse linéaire	$v$	mètre par seconde	$m s^{-1}$	$L T^{-1}$
vitesse angulaire	$\omega$	radian par seconde	$rad s^{-1}$	$T^{-1}$
force	$F$	newton	$N$	$L M T^{-2}$
puissance	$P$	watt	$W$	$L^2 M T^{-3}$

## 2. Incertitude absolue et incertitude relative

Une mesure  $a$  est toujours accompagnée d'une **incertitude absolue**  $\Delta a$ .

$$a = (a_m \pm \Delta a) ; (a_m : \text{valeur mesurée})$$

signifie que la valeur de  $a$  est comprise dans l'intervalle:

$$a_m - \Delta a < a < a_m + \Delta a$$

Souvent l'incertitude absolue correspond à la plus petite graduation de l'instrument de mesure utilisé. Elle est donc liée à la qualité et au prix de ce dernier.

Exemples:

$$d = (354 \pm 3) [km] \Rightarrow 351[km] < d < 357[km]$$

$$m = (5,25 \pm 0,02) [kg] \Rightarrow 5,23[kg] < m < 5,27[kg]$$

**L'incertitude relative**  $\Delta a/a$  est le quotient de l'erreur absolue par la valeur mesurée.

Exemple:

$$m = (25,4 \pm 0,2) [m] \Rightarrow \Delta m/m = 0,2/25,4 = 0,08\%$$

**Calcul de l'incertitude :**

La grandeur expérimentale est différenciée par rapport à chacune des grandeurs, considérées comme indépendantes. Dans le cas de produits ou de quotients il est rapide d'effectuer cette différenciation en passant par les logarithmes.

Exemple :

$$G = \frac{A+B}{C} D$$

On différencie

$$dG = \frac{D}{C} dA + \frac{D}{C} dB - \frac{A+B}{C^2} D dC + \frac{A+B}{C} dD$$

On trouve

$$\frac{dG}{G} = \frac{1}{A+B} dA + \frac{1}{A+B} dB - \frac{1}{C} dC + \frac{1}{D} dD$$

Le passage aux incertitudes correspond au passage à la plus grande valeur possible en valeur absolue de tous les coefficients multiplicatifs, soit ici

$$\frac{\Delta G}{G} = \left| \frac{1}{A+B} \right| dA + \left| \frac{1}{A+B} \right| dB + \left| -\frac{1}{C} \right| dC + \left| \frac{1}{D} \right| dD$$

# Outils mathématiques

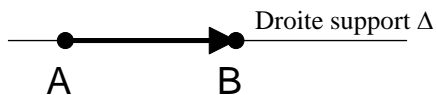
## Calcul vectoriel

### 3. Les vecteurs : définitions

#### 3.1. Définitions

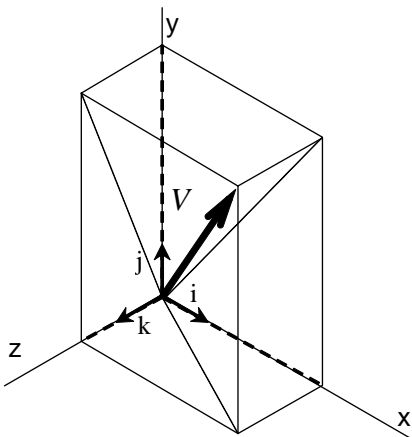
Un *scalaire* est un nombre réel, pouvant être utilisé pour mesurer une grandeur (vitesse, température, durée, etc.)

Un *vecteur* est une représentation graphique, dans le plan ou l'espace, délimitée par une origine et une extrémité.



Un *vecteur* est défini par :

- son point d'application :  $A$
- sa direction : *droite  $\Delta$*
- son sens : *de  $A$  vers  $B$*
- sa norme (ou intensité) :  $d(A,B)$



Soit  $R$  un repère orthonormé direct, de vecteurs unitaires  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .

Soit  $\vec{V}$  un vecteur de coordonnées cartésiennes  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Il existe plusieurs notations :

$$\vec{V}(a,b,c) \quad \vec{V} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \vec{V} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \quad \vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

#### 3.2. Vecteur libre, vecteur lié

Un vecteur est dit *libre* lorsqu'il n'est défini que par sa direction, son sens et son intensité.

Un vecteur est nommé *vecteur glissant* (ou *glisseur*) lorsqu'on impose sa droite support.

Un vecteur est dit *lié* lorsqu'on fixe son origine (point d'application).

#### 3.3. Norme d'un vecteur

Soit un vecteur  $\vec{V}(a,b,c)$ . Sa norme se note  $\|\vec{V}\|$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

### 3.4. Calcul à partir des coordonnées de deux points

Soient le point A  $\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$  l'origine d'un vecteur libre  $\vec{V}$ , et le point B  $\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix}$  l'extrémité de ce vecteur.



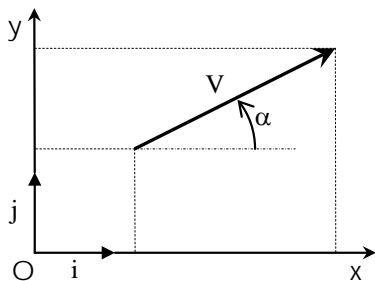
$$\vec{V} = \begin{pmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{pmatrix}$$

$\vec{V}$  peut se noter également  $\overrightarrow{AB}$ .

### 3.5. Propriétés

- Relation de Chasles :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

### 3.6. Projection d'un vecteur dans un repère plan



Exprimer les coordonnées de  $\vec{V}$  en fonction de  $\|\vec{V}\|$  et de  $\alpha$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  revient à projeter le vecteur  $\vec{V}$  :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \|\vec{V}\| \cdot \cos \alpha \\ \|\vec{V}\| \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Cette expression est valable si  $\alpha$  est mesuré entre l'axe x et le vecteur  $\vec{V}$  dans le sens trigonométrique.

### 3.7. Vecteur nul

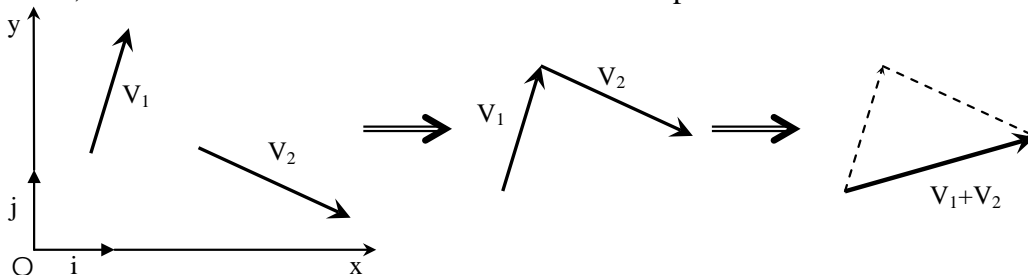
Un vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues est appelé *vecteur nul*. Il est noté  $\vec{0}(0,0,0)$ .

## 4. Opérations sur les vecteurs

### 4.1. Somme et soustraction de vecteurs

Soient  $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ , alors  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ Y_1 + Y_2 \\ Z_1 + Z_2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} X_1 - X_2 \\ Y_1 - Y_2 \\ Z_1 - Z_2 \end{pmatrix}$

Graphiquement, faire la somme de deux vecteurs revient à les placer bout à bout :



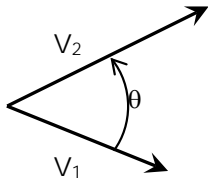
La somme de vecteurs est commutative :  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$ .

## 4.2. Produit d'un vecteur par un scalaire

Multiplier un vecteur  $\vec{V}$  par un scalaire  $k$  revient à additionner  $k$  fois le vecteur  $\vec{V}$ .

Exemple :  $3\vec{V} = \vec{V} + \vec{V} + \vec{V}$

## 4.3. Produit scalaire de deux vecteurs



Le produit scalaire de deux vecteurs est un **scalaire** :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos(\theta)$$

Remarques :

- Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est toujours nul.
- Attention, le produit scalaire se note ' $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ ' (point).

Soient :  $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$  alors :  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2$

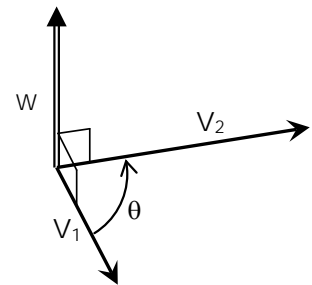
## 4.4. Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel se note  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ . Le résultat est un **vecteur**.

Soient  $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

$\vec{W}$  est défini par :

- sa direction, perpendiculaire au plan formé par  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  ;
- son sens, tel que le trièdre  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{W}$  soit direct ;
- sa norme,  $\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \sin(\theta)$ .



$$\vec{W} \begin{vmatrix} Y_1 \cdot Z_2 - Z_1 \cdot Y_2 \\ Z_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot Z_2 \\ X_1 \cdot Y_2 - Y_1 \cdot X_2 \end{vmatrix}$$

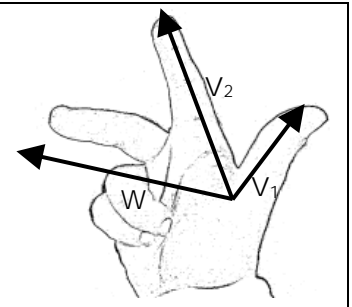
Attention !  
 $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = - \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$

Trièdre direct :

En utilisant la **main droite**, on peut modéliser :

- le vecteur  $\vec{V}_1$  avec le **pouce** ;
- le vecteur  $\vec{V}_2$  avec l'**index** ;

Le **majeur** donne alors le sens de  $\vec{W}$ ,  
 résultat du produit vectoriel  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$



Méthode pratique pour appliquer le produit vectoriel :

On effectue le « produit en croix ».

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \rightarrow Y_1 \cdot Z_2 - Z_1 \cdot Y_2$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} Y_1 & Z_2 - Z_1 & Y_2 \\ Z_1 & X_2 - X_1 & Z_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 \\ Z_1 X_2 - X_1 Z_2 \\ X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \end{vmatrix}$$

Exemples :

$$\vec{V}_1 \begin{vmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \vec{V}_2 \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} \quad \vec{W} \begin{vmatrix} (-2) \times (-2) - 3 \times 1 = 1 \\ (3 \times 2) - (6 \times (-2)) = 18 \\ (6 \times 1) - ((-2) \times 2) = 10 \end{vmatrix}$$

## 2.5. Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs est le scalaire noté

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Le produit mixte possède toutes les propriétés du déterminant:  
il change de signe si on permute deux vecteurs,  
il s'annule si deux au moins des vecteurs sont identiques....

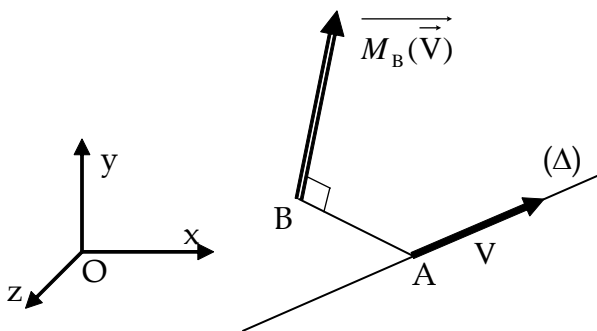
## 2.6. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel est le vecteur qui s'écrit

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

# 5. Moment d'un vecteur

## 5.1. Définition



Le moment d'un vecteur  $\vec{V}$  d'origine A, par rapport à un point de l'espace B, est le vecteur défini par la relation :

$$\boxed{\vec{M}_B(\vec{V}) = \vec{BA} \wedge \vec{V}}$$

Ce moment est un vecteur lié dont les caractéristiques sont :

- son origine : le point B
- sa direction : la droite perpendiculaire au plan formé par  $\vec{BA}$  et  $\vec{V}$
- son sens : tel que le trièdre  $(\vec{BA}, \vec{V}, \vec{M}_B(\vec{V}))$  soit direct
- son intensité :  $\|\vec{M}_B(\vec{V})\| = \|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot |\sin(\angle \vec{BA}, \vec{V})|$ .

Attention : Les caractéristiques du vecteur  $\vec{M}_B(\vec{V})$  dépendent de la position du point B.

### 5.2. Relation de Varignon

Soit  $\vec{M}_A(\vec{V})$  le moment exprimé au point A d'un vecteur  $\vec{V}$ .

On peut en déduire l'expression du moment de ce vecteur  $\vec{V}$  en n'importe quel point B de l'espace :

$$\vec{M}_B(\vec{V}) = \vec{M}_A(\vec{V}) + \vec{BA} \wedge \vec{V}$$

## 6. Dérivée d'une fonction vectorielle

Soit  $\vec{V}(t)$  une fonction vectorielle d'une seule variable scalaire  $t$ . La dérivée de  $\vec{V}(t)$  est défini par :

$$\vec{V}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

Propriétés :

- Si  $\vec{V}(t)$  une fonction vectorielle constante alors  $\vec{V}'(t) = \vec{0}$
- $\frac{d(\vec{V}_1(t) + \vec{V}_2(t))}{dt} = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt} + \frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$
- $\frac{d(\vec{V}_1(t) \cdot \vec{V}_2(t))}{dt} = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt} \cdot \vec{V}_2(t) + \vec{V}_1(t) \cdot \frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$
- $\frac{d(\vec{V}_1(t) \wedge \vec{V}_2(t))}{dt} = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt} \wedge \vec{V}_2(t) + \vec{V}_1(t) \wedge \frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$